1 Eigenwerte und Eigenvektoren

1.1 Eigenwerte und Eigenwerte von Matrizen und linearen Abbildungen

Wir betrachten lineare Abbildungen mit $F : V \to V, x \mapsto Fx$ eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V in sich und interessieren uns für Vektoren, deren Richtung durch die Abbildung nicht ändert, d.h. sie werden nur um einen Faktor skaliert.

Diese Vektoren heissen **Eigenvektoren**.

Der Faktor um der ein Eigenvektor durch die Abbildung skaliert wird heisst **Eigenwert**.

Eigenwerte charakterisieren wesentliche Eigenschaften linearer Abbildungen, etwa ob ein entsprechendes lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht.

Folgend noch die formellen Definitionen:

Definition Die Zahl $\lambda \in \mathbb{E}$ heisst **Eigenwert** [*eigenvalue*] der linearen Abbildung $F : V \to V$, falls es einen **Eigenvektor** [*eigenvector*] $v \in V, v \neq o$ gibt, so dass

$$\boxed{Fv = \lambda v}$$

D.h. der Vektor v wird durch die Abbildung F nur um λ skaliert, behält seine Richtung aber bei

Ist λ ein Eigenwert, so ist der zugehörige **Eigenraum** [*eigenspace*] E_λ gleich der um den Nullvektor erweiterten Menge der Eigenvektoren zu λ:

$$\boxed{E_\lambda :\equiv \{v \in V;\ Fv = \lambda v\}}$$

Die Menge aller Eigenwerte von F heisst **Spektrum** [*spectrum*] von F und wird mit $\sigma(F)$ bezeichnet.

Als Abkürzungen für die Begriffe Eigenvektor und Eigenwert schreibt man oft **EV** [$EVec$] und **EW** [$EVal$]

Lemma 9.2 λ ist genau dann ein Eigenwert von $F : V \to V$ wenn der Kern von $F - \lambda I$ nicht nur aus dem Nullvektor besteht. Der Eigenraum E_λ zu einem Eigenwert λ von F ist ein vom Nullraum verschiedener Unterraum von V und zwar

$$E_\lambda = ker(F - \lambda I)$$

Definition Die **geometrische Vielfalt** eines Eigenwerts λ ist gleich der Dimension von E_λ

Korollar 9.3 λ ist genau dann ein Eigenwert von $\mathbf{A} \in \mathbb{E}^{n \times n}$ wenn $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ singulär ist. Aus Lemma 9.2 folgt: E_λ besteht aus allen Lösungen $\mathbf{v}$ des homogenen Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{o}$$

Definition Das Polynom

$$\mathcal{X}_{\mathbf{A}}(\lambda) :\equiv det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

heisst **charakteristisches Polynom** der Matrix **A** und die Gleichung

$$\mathcal{X}_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$$

ist die **charakteristische Gleichung**.

Definition Die Summe der Diagonalelemente von **A** nennt man **Spur** von **A**.

Satz 9.5 $\lambda \in \mathbb{E}$ ist genau dann Eigenwert der Matrix **A** wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\mathcal{X}_{\mathbf{A}}$ ist, d.h. wenn λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist.

Definition Die **algebraische Vielfachheit** eines Eigenwertes λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. wie oft λ in der Lösung des charakteristischen Polynoms vorkommt (da diese ja auch gleich sein können).

Algorithmus 9.1 (Berechnung von EW und EV via charakteristisches Polynom)
Um die EW und EV einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zu bestimmen kann man so vorgehen:

1. Berechnung des charakteristischen Polynoms $\mathcal{X}_{\mathbf{A}}$:

$$\mathcal{X}_{\mathbf{A}}(\lambda) :\equiv det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

2. Berechne die n Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des charakteristischen Polynoms bzw. die Lösungen des charakteristischen Gleichung.

3. Bestimme für jeden (verschiedenen) Eigenwert λ_k die Basis des Kernes von $\mathbf{A}-\lambda_k\mathbf{I}$, d.h. Berechnung von allen linear unabhängigen Lösungen des singulären homogenen Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{o}$$

   Um dies zu machen wendet man den Gauss-Algorithmus auf $\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{I}$ an und bringt diese Matrix so auf Zeilenstufenform und wählt dann von den $n - r$ (wobei r der Rang der Matrix ist) freien Parmetern der Reihe nach immer einen $\neq 0$ und die anderen $= 0$. Die Dimension $n - r$ des Lösungsraums ist auch gleich der geometrischen Vielfachheit dieses Eigenwertes.

Lemma 9.6 Eine (quadratische) Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann singulär, wenn sie 0 als Eigenwert hat:

$$\mathbf{A} \text{ ist singulär} \iff 0 \in \sigma(\mathbf{A})$$

1.2 Ähnlichkeitstransformationen, die Eigenwertzerlegung

Definition Zwei Matrizen heissen **ähnlich**, wenn sie bei Verwendung unterschiedlicher Basen die gleiche lineare Abbildung beschreiben. D.h. zwei quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{E}^{n\times n}$ heissen **ähnlich**, wenn es eine reguläre Matrix $\mathbf{S} \in \mathbf{E}^{n\times n}$ gibt, so dass

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} \text{ bzw. } \mathbf{S}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{S}$$

gilt.

Im Falle des kommutativen Diagramms (in Abschnitt 6.5) gilt dann auch:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \text{ bzw. } \mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}$$

d.h. die $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind ähnlich. Der Übergang $\mathbf{A} \to \mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ wird als **Ähnlichkeitstransformation** bezeichnet.

Satz 9.7 Ähnliche Matrizen haben *dasselbe charakteristische Polynom*, d.h. sie haben die gleiche Determinante, die gleiche Spur und die gleichen Eigenwerte! Die geometrische und die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist bei ähnlichen Matrizen ebenfalls gleich.

Definition Eine Basis aus Eigenvektoren von F (bzw. $\mathbf{A}$) heisst **Eigenbasis**.

Die Spektralzerlegung / Eigenwertzerlegung
Sei $V = \mathbb{E}^n$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{E}^{n \times n}$
Wenn $\mathbf{A}$ eine Eigenbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ besitzt, und dabei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die entsprechenden Eigenwerte sind (die ja wie weiter oben beschrieben nicht unbedingt verschieden sein müssen), dann ist $\mathbf{A}$ ähnlich zu einer diagonalen Matrix Λ:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{A} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wobei die Matrix bestehend aus den Eigenvektoren $\mathbf{W}$ und die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen $\mathbf{\Lambda}$ genannt wird.
$\mathbf{W}$ ist dabei invertierbar. Daraus folgt:

$$\mathbf{AW} = \mathbf{W\Lambda} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{W\Lambda W}^{-1}$$

Wir sagen $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar durch $\mathbf{W}$.

Definition $\mathbf{A} = \mathbf{W\Lambda W}^{-1}$ (wie oben) heisst **Spektralzerlegung** oder **Eigenwertzerlegung** von $\mathbf{A}$.

Definition Eine Matrix $\mathbf{A}$ zu der es eine Spektralzerlegung mit diagonalem $\mathbf{\Lambda}$ gibt heisst **diagonalisierbar**.

Definition Ein Vektor $\mathbf{w}$, für den gilt $\mathbf{w}^\mathrm{T}\mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{w}^\mathrm{T}$ heisst **linker Eigenvektor** von $\mathbf{A}$.

Satz 9.11 Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Satz 9.13 Für jeden Eigenwert gilt: geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit

Satz 9.14 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes von $\mathbf{A}$ ist gleich seiner algebraischen Vielfachheit.